8 Rijen en veranderingen

Voorkennis Procenten

Bladzijde 8

1 **a** met 1,37
b met 1,016
c met 2,28
d met 1,002
e met 0,85
f met 0,017
g met 0,9818
h met 0,993

2 **a** NIEUW = $0{,}877 \cdot 8700 = 7629{,}9$
b NIEUW = $1{,}28 \cdot 3{,}2$ miljoen = 4,096 miljoen
c NIEUW = $0{,}17 \cdot 6{,}32$ miljard = 1,0744 miljard

3 **a** In 2012 waren er $120 \cdot 0{,}965^2 \approx 112$ broedparen.
In 2014 waren er $120 \cdot 0{,}965^4 \approx 104$ broedparen.
b In 2020 zullen er dan nog $120 \cdot 0{,}965^{10} \approx 84$ broedparen zijn.

4 **a** Op 1 juli 2014 was er nog $1{,}10 \cdot 12\,000 - 800 = 12\,400$ m^3 hout aanwezig.
b Op 1 juli 2015 was er $1{,}10 \cdot 12\,400 - 800 = 12\,840$ m^3 hout aanwezig.

5 Na één dag is $0{,}40 \cdot 80 + 30 = 62$ mg aanwezig, dus na twee dagen is $0{,}40 \cdot 62 + 30 = 54{,}8$ mg aanwezig.

8.1 Recursieve en directe formules

8

Bladzijde 9

1 **a** $10\,000 \times 1{,}05 - 700 = 10\,500 - 700 = 9800$
b $9800 \times 1{,}05 - 700 = 10\,290 - 700 = 9590$
c

datum	1-1-2015	1-1-2016	1-1-2017	1-1-2018	1-1-2019
restschuld	10 000	9800	9590	9369,50	9137,98

Bladzijde 10

2 **a** Voer in 200 en 0,9Ans + 50.
Je krijgt $u_6 \approx 340{,}57$ en $u_7 \approx 356{,}51$.
b $u_{10} \approx 395{,}40$ en $u_{11} \approx 405{,}86$.
Vanaf de 12^e^ term is $u_n > 400$.

3 **a** Voer in 50 en $10 + 20\sqrt{\text{Ans}}$.
$u_3 = 330{,}07$ en $u_4 = 373{,}35$.
b $u_{11} \approx 419{,}44$ en $u_{12} \approx 419{,}60$.
Vanaf de 13^e^ term is $u_n > 419{,}5$.
c Nee, u_n nadert tot 419,7617696… en bereikt de 420 nooit.

Bladzijde 11

4 **a** Voer in 25 en Ans + Ans / (1 + Ans).
$u_6 \approx 30{,}79$ en $u_7 \approx 31{,}76$.
b $u_{10} \approx 34{,}67$ en $u_{11} \approx 35{,}64$.
Dus vanaf de 12^e^ term is $u_n > 35$.

5 **a** Het verschil is steeds 10 en de beginterm is 100, dus $u_n = u_{n-1} + 10$ met $u_0 = 100$.
b Het verschil is steeds −20 en de beginterm is 200, dus $u_n = u_{n-1} - 20$ met $u_0 = 200$.
c Elke term is 1,2 keer zo groot als de term ervoor en de beginterm is 1000, dus
$u_n = 1{,}2u_{n-1}$ met $u_0 = 1000$.
d Elke term is 0,6 keer zo groot als de term ervoor en de beginterm is 2000, dus
$u_n = 0{,}6u_{n-1}$ met $u_0 = 2000$.

© Noordhoff Uitgevers bv

6 **a** Het verschil is steeds −73 en de beginterm is 800.
Voer in 800 en Ans −73.
$u_{10} = 70$ en $u_{11} = -3$.
Er zijn dus 11 positieve termen.
b Elke term is 0,75 keer zo groot als de term ervoor en de beginterm is 1024.
Voer in 1024 en 0,75Ans.
$u_{16} \approx 10{,}26$ en $u_{17} \approx 7{,}70$.
Dus er zijn 17 termen groter dan 10.

7 **a** Elke term is de som van de twee termen ervoor. De volgende term is dus 21 + 34 = 55.
b Je kunt deze rij niet op het basisscherm doorrekenen omdat je alleen het laatste antwoord van een berekening kunt gebruiken. Ans geeft u_{n-1}, voor u_{n-2} is er geen knop op je GR.

Bladzijde 13

8 **a** TI
Voer in $u(n) = 0{,}5u(n-1) + n^2$
met nMin = 0 en u(nMin) = 100.
$u_0 = 100$, $u_1 = 51$, $u_2 = 29{,}5$,
$u_3 = 23{,}75$, $u_4 = 27{,}875$, …
De kleinste term is u_3.

Casio
Voer in $a_{n+1} = 0{,}5a_n + (n+1)^2$
met Start: 0 en a_0: 100.
$a_0 = 100$, $a_1 = 51$, $a_2 = 29{,}5$,
$a_3 = 23{,}75$, $a_4 = 27{,}875$, …
De kleinste term is u_3.

b $u_7 \approx 76{,}73$
c $u_{16} \approx 454$ en $u_{17} \approx 516$.
Vanaf de 18e term is $u_n > 500$.

9 **a** $u(0) = 2$
$u(1) = 3$
$u(2) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$
$u(3) = 2 \cdot 8 + 3 = 19$
$u(4) = 2 \cdot 19 + 8 = 46$
$u(5) = 2 \cdot 46 + 19 = 111$
b TI
Voer in $u(n) = 2u(n-1) + u(n-2)$
met nMin = 0 en u(nMin) = {3, 2}.
$u(15) = 746\,639$ en $u(16) = 1\,802\,546$.
Dus vanaf de 17e term is $u(n) > 1\,000\,000$.

Casio
Voer in $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$
met Start: 0 en a_0 : 2 en a_1 : 3.

10 **a** $u(n+1) = u(n) + 5(n+1)$ met $u(0) = 100$
b $a_n = 4a_{n-1} - 3$ met $a_0 = 12$
c $b_n = 3b_{n-1} - 2b_{n-2}$ met $b_0 = 4$ en $b_1 = 5$

Bladzijde 14

11 **a** TI
Voer in $u(n) = u(n-1) + n^2$
met nMin = 0 en u(nMin) = 10.
De 10e term is $k(9) = 295$.

Casio
Voer in $a_{n+1} = a_n + (n+1)^2$
met Start: 0 en a_0: 10.
De 10e term is $k(9) = 295$.

b $k(10) = 395$, $k(11) = 516$, $k(13) = 829$ en $k(14) = 1025$.
Dus er liggen drie termen tussen 500 en 1000.
c $k(19) = 2480$ en $k(20) = 2880$.
Dus $k(20) - k(19) = 400$.
Voor $n = 19$ geldt $k(n+1) - k(n) = 400$.

12 **a** Hij krijgt 2% rente, dus keer 1,02.
Hij neemt € 100 op, dus −100.
De juiste formule is dus $u_n = 1{,}02u_{n-1} - 100$ met $u_0 = 1000$.
b Voer de formule in op de GR en kijk in de tabel.
$u_{11} \approx 26{,}50$ en $u_{12} \approx -72{,}97$.
Dus op 1-1-2027 is het saldo voor het eerst ontoereikend om € 100 op te nemen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 15

13 **a** $H_n = 1{,}08H_{n-1} - 30$ met $H_0 = 275$
b Voer in $u(n) = 1{,}08u(n-1) - 30$ met $u(0) = 275$ (TI)
of $a_{n+1} = 1{,}08a_n - 30$ met $a_0 = 275$ (Casio).
Uit de tabel volgt $H_{10} \approx 159$ en $H_{11} \approx 142$.
In 2026 zijn er op 1 juli voor het eerst minder dan 150 Schotse hooglanders.
c 8% van 275 is 22.
Dus moeten elk jaar 22 dieren worden verplaatst.

14 **a** $B_n = 1{,}015B_{n-1} - 200$ met $B_0 = 25\,000$
b Voer in $u(n) = 1{,}015u(n-1) - 200$ met $u(0) = 25\,000$ (TI)
of $a_{n+1} = 1{,}015a_n - 200$ met $a_0 = 25\,000$ (Casio).
Uit de tabel volgt $B_{11} \approx 27\,076{,}08$.
Dus op 1 januari 2026 staat er € 27 076,08 op haar rekening.
c Uit de tabel volgt $B_{23} \approx 29\,764$ en $B_{24} \approx 30\,011$.
Dus op 1 januari van 2039 heeft Eva voor het eerst meer € 30 000 op haar spaarrekening staan.
d 1,5% van 25 000 is 375.
Dus ze kan jaarlijks € 375 opnemen.

15 **a** $u_0 = 2$, $u_1 = 8$, $u_2 = 14$, $u_3 = 20$, $u_4 = 26$
b $a = 6$
c $u_{1000} = 2 + 6 \cdot 1000 = 6002$

Bladzijde 16

16 **a** De achtste term is $u_8 = 8^2 + 2 \cdot 8 = 80$.
b Voer in $u(n) = (n+3)(n-2)$ met nMin = 0 (TI)
of $a_n = (n+3)(n-2)$ met Start: 0 (Casio).
De tabel geeft $v_{22} = 500$, dus de 23e term is 500.
c $n = 0$ geeft $w_0 = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$
$n = 1$ geeft $w_1 = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$
Dus de beginterm is w_1.
Voer in $u(n) = n^3 - 3n + 1$ met nMin = 1 (TI)
of $a_n = n^3 - 3n + 1$ met Start: 1 (Casio).
De tabel geeft $w_{14} \approx 2703$, dus de 14e term is 2703.

Bladzijde 17

17 **a** $D_6 = D_5 + 6 = 15 + 6 = 21$
$D_7 = D_6 + 7 = 21 + 7 = 28$
$D_8 = D_7 + 8 = 28 + 8 = 36$
b Uit de regelmaat volgt $D_n = D_{n-1} + n$ met $D_1 = 1$.
c Het twaalfde driehoeksgetal is $D_{12} = \frac{1}{2} \cdot 12^2 + \frac{1}{2} \cdot 12 = 78$.
d Voer in $u(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ met nMin = 1 (TI)
of $a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ met Start: 1 (Casio).
De tabel geeft $D_{25} = 325$, dus het 25e driehoeksgetal is 325.
e
$$\begin{aligned} D_{n-1} &= \tfrac{1}{2}(n-1)^2 + \tfrac{1}{2}(n-1) \\ &= \tfrac{1}{2}(n^2 - 2n + 1) + \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}n^2 - n + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n \end{aligned}$$
Dus $D_{n-1} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.
f
$$\begin{aligned} D_n - D_{n-1} &= \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n - \left(\tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n\right) \\ &= \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n \\ &= n \end{aligned}$$
Dus $D_n - D_{n-1} = n$.
g Uit $D_n - D_{n-1} = n$ volgt $D_n = D_{n-1} + n$ en dit is de recursieve formule van D_n.

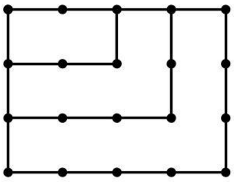
8

© Noordhoff Uitgevers bv

18 In figuur 8.3 is te zien dat $2D_3 = 4 \cdot 3$.
En zo is $2D_4 = 5 \cdot 4$.
Algemeen is $2D_n = (n + 1) \cdot n$.
Dus $D_n = \frac{1}{2}n(n + 1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

Bladzijde 18

19 **a**



Het vierde rechthoeksgetal is $5 \cdot 4 = 20$.
Het vijfde rechthoeksgetal is $6 \cdot 5 = 30$.

b $R_1 = 2, R_2 = 6, R_3 = 12, R_4 = 20, R_5 = 30, \ldots$
+ 4 + 6 + 8 + 10
Uit de regelmaat volgt $R_n = R_{n-1} + 2n$ met $R_1 = 2$.

c Het n^e rechthoeksgetal is $(n + 1) \cdot n$, dus $R_n = (n + 1) \cdot n = n^2 + n$.

d Voer in $u(n) = n^2 + n$ met nMin = 1 (TI)
of $a_n = n^2 + n$ met Start: 1 (Casio).
De tabel geeft $R_{12} = 156$, dus het 12^e rechthoeksgetal is 156.

e Uit $R_n = n^2 + n$ volgt $R_{n-1} = (n - 1)^2 + n - 1$.
$R_{n-1} = (n - 1)^2 + n - 1 = n^2 - 2n + 1 + n - 1 = n^2 - n$

f $R_n - R_{n-1} = n^2 + n - (n^2 - n) = n^2 + n - n^2 + n = 2n$
Uit $R_n - R_{n-1} = 2n$ volgt $R_n = R_{n-1} + 2n$ en dit is de recursieve formule van R_n.

20 Uit $V_n = 1\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ volgt $V_{n-1} = 1\frac{1}{2}(n - 1)^2 - \frac{1}{2}(n - 1)$.

$V_{n-1} = 1\frac{1}{2}(n - 1)^2 - \frac{1}{2}(n - 1) = 1\frac{1}{2}(n^2 - 2n + 1) - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}n^2 - 3n + 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}n^2 - 3\frac{1}{2}n + 2$

Dus $V_{n-1} = 1\frac{1}{2}n^2 - 3\frac{1}{2}n + 2$.

$V_n - V_{n-1} = 1\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - \left(1\frac{1}{2}n^2 - 3\frac{1}{2}n + 2\right) = 1\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1\frac{1}{2}n^2 + 3\frac{1}{2}n - 2 = 3n - 2$
Uit $V_n - V_{n-1} = 3n - 2$ volgt $V_n = V_{n-1} + 3n - 2$ dus de recursieve formule van V_n is $V_n = V_{n-1} + 3n - 2$ met $V_1 = 1$.

21 **a** $D_{20} = \frac{1}{2} \cdot 20^2 + \frac{1}{2} \cdot 20 = 210$, dus het aantal glazen in de 20^e laag is 210.

b $P_{40} = \frac{1}{6} \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 = 11\,480$, dus een toren van 40 glazen bestaat uit 11 480 glazen.

c Voer in $u(n) = \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)$ met nMin = 1 (TI)
of $a_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)$ met Start: 1 (Casio).
De tabel geeft $P_{63} = 43\,680$, dus de toren bestond uit 63 lagen.
$D_{63} = \frac{1}{2} \cdot 63^2 + \frac{1}{2} \cdot 63 = 2016$, dus de onderste laag bestond uit 2016 glazen.

d $D_{64} = \frac{1}{2} \cdot 64^2 + \frac{1}{2} \cdot 64 = 2080$, dus er zijn 2080 extra glazen nodig.

8.2 Rekenkundige en meetkundige rijen

Bladzijde 20

22 rij A: verschil steeds 3
rij B: verschil steeds 20
rij C: steeds 2 meer er bij
rij D: verschil steeds −5
rij E: verschil steeds −1
rij F: verschil steeds 7
Dus rij C hoort er niet bij.

Bladzijde 21

23 rr met $u_0 = 11$ en $v = 4$, dus $u_n = 11 + 4n$
Los op $11 + 4n = 647$
$4n = 636$
$n = 159$
Dus de 160^e term is 647.

24 **a** rr met $u_0 = 218$ en $v = 5$, dus $u_n = 218 + 5n$.
b De 25e term is $u_{24} = 218 + 5 \cdot 24 = 338$.
c Los op $218 + 5n = 498$
$5n = 280$
$n = 56$
Dus $u_{56} = 498$, dus de 57e term is 498.

25 **a** Er is een constant verschil.
b Recursieve formule: $u_n = u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 13$
Directe formule: $u_n = 13 + 5n$.
c De 38e term is $u_{37} = 13 + 5 \cdot 37 = 198$.
d Los op $13 + 5n = 650$
$5n = 637$
$n = 127{,}4$
Er zijn 128 termen kleiner dan 650.

26 **a** rr met $u_0 = 1023$ en $v = -7$, dus $u_n = 1023 - 7n$.
Los op $1023 - 7n = 246$
$-7n = -777$
$n = 111$
Dus $u_{111} = 246$, dus de 112e term is 246.
b Los op $1023 - 7n = 0$
$-7n = -1023$
$n \approx 146{,}1$
$u_{146} = 1$ en $u_{147} = -6$
De rij heeft 147 positieve termen.

27 **a** rr met $T(1) = 5$ en $v = 2$, dus $T(n) = 5 + 2(n - 1) = 5 + 2n - 2 = 2n + 3$.
b $T(18) = 2 \cdot 18 + 3 = 39$, dus er staan 39 tulpen in de 18e rij.
c Los op $2n + 3 = 60$
$2n = 57$
$n = 28{,}5$
Vanaf de 29e rij staan er meer dan 60 tulpen naast elkaar.

Bladzijde 22

28 Bij rij A is het quotiënt van twee opeenvolgende termen steeds 2.
Bij rij B is het quotiënt van twee opeenvolgende termen steeds $\frac{1}{2}$.
Bij rij C komt er steeds 1 meer bij.
Bij rij D is het quotiënt van twee opeenvolgende termen steeds $\frac{1}{4}$.
Dus rij C hoort er niet bij.

Bladzijde 23

29 **a** Het quotiënt van twee opeenvolgende termen is steeds 1,2.
b $u_0 = 1250$ en $r = 1{,}2$, dus $u_n = 1250 \cdot 1{,}2^n$.
c $u_{10} = 1250 \cdot 1{,}2^{10} \approx 7740$
d De 13e term is $u_{12} = 1250 \cdot 1{,}2^{12} \approx 11\,145$.
e Voer in $u(n) = 1250 \cdot 1{,}2^n$ met nMin = 0 (TI)
of $a_n = 1250 \cdot 1{,}2^n$ met Start: 0 (Casio).
De tabel geeft $u_{13} \approx 13\,374$ en $u_{14} \approx 16\,049$.
Dus vanaf $n = 14$ is $u_n > 15\,000$.

30 **a** mr met $u_0 = 200$ en $r = 0{,}5$, dus $u_n = 200 \cdot 0{,}5^n$.
b mr met $u_1 = 36$ en $r = \frac{1}{2}$, dus dus $u_n = 36 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
c rr met $u_1 = 50$ en $v = 3{,}5$, dus $u_n = 50 + 3{,}5(n - 1)$.
d mr met $u_0 = 14$ en $r = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$, dus $u_n = 14 \cdot 2{,}5^n$.

© Noordhoff Uitgevers bv

31 **a** mr met $u_0 = 2200$ en $r = 1{,}02$, dus
recursieve formule $u_n = 1{,}02 \cdot u_{n-1}$ met $u_0 = 2200$
directe formule $u_n = 2200 \cdot 1{,}02^n$.
b Voer in $u(n) = 2200 \cdot 1{,}02^n$ met nMin = 0 (TI)
of $a_n = 2200 \cdot 1{,}02^n$ met Start: 0 (Casio).
De tabel geeft $u_{35} \approx 4399{,}76$ en $u_{36} \approx 4487{,}75$.
Dus verdubbeling in het jaar 2015 + 35 = 2050.
c $u_n = 1{,}02 \cdot u_{n-1} + 250$ met $u_0 = 2200$
Voer in $u(n) = 1{,}02u(n-1) + 250$ met $u_0 = 2200$ (TI)
of $a_{n+1} = 1{,}02a_n + 250$ met a_0: 2200 (Casio).
De tabel geeft $u_7 \approx 4385{,}68$ en $u_8 \approx 4723{,}39$.
$4723{,}39 - 250 = 4473{,}39$
Dus verdubbeling in het jaar 2015 + 7 = 2022.

32 **a** $3v = u_5 - u_2 = 324 - 12 = 312$, dus $v = 104$.
b $r^3 = \dfrac{u_5}{u_2} = \dfrac{324}{12} = 27$, dus $r = 3$.

Bladzijde 24

33 $r^3 = \dfrac{u_5}{u_2} = \dfrac{14\,400}{1800} = 8$, dus $r = 2$.
Dus $u_n = u_0 \cdot 2^n$.
Invullen van $u_2 = 1800$ geeft $u_0 \cdot 2^2 = 1800$, dus $u_0 = 450$.
De formule is $u_n = 450 \cdot 2^n$.
Dit geeft $u_9 = 450 \cdot 2^9 = 230\,400$.
Omdat $72\,900 \neq 230\,400$ horen de drie gegeven termen niet bij een meetkundige rij.

Bladzijde 25

34 **a** $10v = u_{15} - u_5 = 90 - 130 = -40$, dus $v = -4$.
Dus $u_n = u_0 - 4n$.
Invullen van $u_5 = 130$ geeft $u_0 - 4 \cdot 5 = 130$, dus $u_0 = 150$.
De formule is $u_n = 150 - 4n$.
b $r^7 = \dfrac{v_{10}}{v_3} = \dfrac{118\,098}{54} = 2187$, dus $r = \sqrt[7]{2187} = 3$.
Dus $v_n = v_0 \cdot 3^n$.
Invullen van $v_3 = 54$ geeft $v_0 \cdot 3^3 = 54$, dus $v_0 = 6$.
De formule is $v_n = 6 \cdot 3^n$.

35 Stel u_n is een rekenkundige rij met verschil v.
Dan geldt $5v = u_9 - u_4 = 82{,}5 - 70 = 12{,}5$, dus $v = 2{,}5$
en $6v = u_{15} - u_9 = 97{,}5 - 82{,}5 = 15$, dus $v = 2{,}5$.
Deze termen kunnen bij een rekenkundige rij horen.

36 **a** $5v = u(8) - u(3) = 16\,384 - 16 = 16\,368$, dus $v = 3273{,}6$.
Dus $u(n) = u(1) + 3273{,}6(n-1)$.
Invullen van $u(3) = 16$ geeft $u(1) + 3273{,}6 \cdot 2 = 16$, dus $u(1) = -6531{,}2$.
De formule is $u(n) = -6531{,}2 + 3273{,}6(n-1)$.
b $r^5 = \dfrac{u(8)}{u(3)} = \dfrac{16\,384}{16} = 1024$, dus $r = \sqrt[5]{1024} = 4$.
Dus $u(n) = u(1) \cdot 4^{n-1}$.
Invullen van $u(3) = 16$ geeft $u(1) \cdot 4^2 = 16$, dus $u(1) = 1$.
De formule is $u(n) = 4^{n-1}$.

8

37 $u_2 = 12$ invullen in $u_n = an^2 + bn$ geeft $4a + 2b = 12$ ofwel $2a + b = 6$.
$u_5 = 324$ invullen in $u_n = an^2 + bn$ geeft $25a + 5b = 324$.

Zo ontstaat het stelsel $\begin{cases} 2a + b = 6 \\ 25a + 5b = 324 \end{cases}$

$\begin{cases} 2a + b = 6 \\ 25a + 5b = 324 \end{cases} \begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 10a + 5b = 30 \\ 25a + 5b = 324 \end{cases}$ −
$-15a = -294$, dus $a = 19{,}6$
$a = 19{,}6$ en $2a + b = 6$ geeft $2 \cdot 19{,}6 + b = 6$, dus $b = -33{,}2$.
Dus $a = 19{,}6$ en $b = -33{,}2$.

8.3 Somrijen

Bladzijde 27

38 $u_0 = 2$, $u_1 = 5$, $u_2 = 8$, $u_3 = 11$ en $u_4 = 14$
$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$

Bladzijde 28

39 **a** $\sum_{k=0}^{5} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 72$
b $\sum_{i=1}^{5} v_i = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 4 + 7 + 12 + 19 + 28 = 70$
c $\sum_{k=0}^{4} w(k) = w(0) + w(1) + w(2) + w(3) + w(4) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$

40 **a** $\sum_{k=0}^{3} u(k) = u(0) + u(1) + u(2) + u(3) = 3 + 11 + 27 + 59 = 100$
b $\sum_{j=1}^{3} v_j = v_1 + v_2 + v_3 = 130 + 169 + 219{,}7 = 518{,}7$
c $\sum_{i=0}^{5} w_i = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 2 + 1 - 2 + 1 - 2 + 1 = 1$

41 **a** $\sum_{k=1}^{5} (3k + 7) = 10 + 13 + 16 + 19 + 22 = 80$
b $\sum_{i=0}^{4} (3i^2 + i + 1) = 1 + 5 + 15 + 31 + 53 = 105$
c $\sum_{j=0}^{4} (j^3 - j^2) = 0 + 0 + 4 + 18 + 48 = 70$

Bladzijde 29

42 $S(10) = \sum_{k=0}^{10} u(k)$, dus vraag b is dan: Bereken $\sum_{k=0}^{10} u(k)$.
Vraag c wordt dan: Bereken vanaf welke n geldt dat $S(n) > 50\,000$.

Bladzijde 30

43 **a** $S_n = S_{n-1} + 2u_{n-1} - 5$ met $S_0 = 10$.
b TI Voer in
$u(n) = 2u(n - 1) - 5$ met nMin = 0 en u(nMin) = 10
en $v(n) = v(n - 1) + 2u(n - 1) - 5$ met v(nMin) = 10.
De tabel geeft $S_8 = 2600$.
Casio Voer in $a_{n+1} = 2a_n - 5$ met $a_0 = 10$.
Aflezen bij $\sum a_{n+1}$ in de tabel geeft $S_8 = 2600$.
c Lees af in de tabel $S_{11} = 20\,535$ en $S_{12} = 41\,020$.
Dus vanaf $n = 12$.

8

© Noordhoff Uitgevers bv

44 **a** TI Voer in
$u(n) = n^2 - 2n + 1$ met nMin = 0
en $v(n) = v(n-1) + n^2 - 2n + 1$ met v(nMin) = 1.
Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{15} u_k = 1016$.

Casio Voer in $a_n = n^2 - 2n + 1$ met Start: 0.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=0}^{15} u_k = 1016$.

b Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{20} u_k = 2471$ en $\sum_{k=0}^{21} u_k = 2871$.
Dus vanaf $n = 21$.

45 **a** TI Voer in
$u(n) = n^2 + 1$ met nMin = 0
en $v(n) = v(n-1) + n^2 + 1$ met v(nMin) = 1.
Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{20} (k^2 + 1) = 2891$.

Casio Voer in $a_n = n^2 + 1$ met Start: 0.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=0}^{20} (k^2 + 1) = 2891$.

b TI Voer in
$u(n) = (n+1)^2$ met nMin = 0
en $v(n) = v(n-1) + (n+1)^2$ met v(nMin) = 1.
Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{20} (k+1)^2 = 3311$.

Casio Voer in $a_n = (n+1)^2$ met Start: 0.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=0}^{20} (k+1)^2 = 3311$.

c TI Voer in
$u(n) = n^2 - 2n$ met nMin = 2
en $v(n) = v(n-1) + n^2 - 2n$ met v(nMin) = 0.
Lees af in de tabel $\sum_{k=2}^{15} (k^2 - 2k) = 1001$.

Casio Voer in $a_n = n^2 - 2n$ met Start: 2.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=2}^{15} (k^2 - 2k) = 1001$.

d TI Voer in
$u(n) = \frac{1}{2}n^2 - 4$ met nMin = 6
en $v(n) = v(n-1) + \frac{1}{2}n^2 - 4$ met v(nMin) = 14.
Lees af in de tabel $\sum_{k=6}^{30} \left(\frac{1}{2}k^2 - 4\right) = 4600$.

Casio Voer in $a_n = \frac{1}{2}n^2 - 4$ met Start: 6.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=6}^{30} \left(\frac{1}{2}k^2 - 4\right) = 4600$.

46 **a** 1, 5, 9, 13, … is een rr met directe formule $u_n = 1 + 4n$.
Oplossen van $1 + 4n = 101$ geeft $n = 25$.
Dus $1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + \ldots + 101 = \sum_{k=0}^{25} (1 + 4k)$.

TI Voer in
$u(n) = 1 + 4n$ met nMin = 0
en $v(n) = v(n-1) + 1 + 4n$ met v(nMin) = 1.
Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{25} (1 + 4k) = 1326$.

Casio Voer in $a_n = 1 + 4n$ met Start: 0.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=0}^{25} (1 + 4k) = 1326$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b 768, 384, 192, 96,… is een mr met directe formule $u_n = 768 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
Oplossen van $768 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 3$ geeft $n = 8$.
Dus $768 + 384 + 192 + 96 + \ldots + 3 = \sum_{k=0}^{8} 768 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

TI Voer in
$u(n) = 768 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ met nMin = 0
en $v(n) = v(n-1) + 768 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ met v(nMin) = 768.
Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{8} 768 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1533$.

Casio Voer in $a_n = 768 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ met Start: 0.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=0}^{8} 768 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1533$.

47 Je hebt te maken met de rr $Z_n = 12 + 4(n-1)$ waarin Z_n het aantal zitplaatsen is op rij n.

Het totaal aantal plaatsen in vak K is $\sum_{k=1}^{22} (12 + 4(k-1))$.

TI Voer in
$u(n) = 12 + 4(n-1)$ met nMin = 1
en $v(n) = v(n-1) + 12 + 4(n-1)$ met v(nMin) = 12.
Lees af in de tabel $\sum_{k=1}^{22} (12 + 4(k-1)) = 1188$, dus er is plaats voor 1188 supporters.

Casio Voer in $a_n = 12 + 4(n-1)$ met Start: 1.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=1}^{22} (12 + 4(k-1)) = 1188$,
dus er is plaats voor 1188 supporters.

48 Je hebt te maken met de mr $O_n = 11{,}3 \cdot 1{,}074^n$ waarin O_n de omzet is in het jaar n met O_0 in 1995.
De totale omzet in de periode van 1995 tot en met 2015 is $\sum_{k=0}^{20} 11{,}3 \cdot 1{,}074^k$.

TI Voer in
$u(n) = 11{,}3 \cdot 1{,}074^n$ met nMin = 0
en $v(n) = v(n-1) + 11{,}3 \cdot 1{,}074^n$ met v(nMin) = 11,3.
Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{20} 11{,}3 \cdot 1{,}074^k \approx 531$, dus de totale omzet in de periode van 1995 tot en met 2015 is 531 miljard dollar.

Casio Voer in $a_n = 11{,}3 \cdot 1{,}074^n$ met Start: 0.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=0}^{20} 11{,}3 \cdot 1{,}074^k \approx 531$, dus de totale omzet in de periode van 1995 tot en met 2015 is 531 miljard dollar.

49 **a** Je hebt te maken met de rr $S_n = 30{,}62 + 0{,}15(n-1)$ waarin S_n de rondetijd van Sven is in ronde n.
Zijn eindtijd is $\sum_{k=1}^{25} (30{,}62 + 0{,}15(k-1))$.

TI Voer in
$u(n) = 30{,}62 + 0{,}15(n-1)$ met nMin = 1
en $v(n) = v(n-1) + 30{,}62 + 0{,}15(n-1)$ met v(nMin) = 30,62.
Lees af in de tabel $\sum_{k=1}^{25} (30{,}62 + 0{,}15(k-1)) = 810{,}5$,
dus zijn eindtijd is 810,5 seconden = 13 minuten en 30,5 seconden.

Casio Voer in $a_n = 30{,}62 + 0{,}15(n-1)$ met Start: 1.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=1}^{25} (30{,}62 + 0{,}15(k-1)) = 810{,}5$,
dus zijn eindtijd is 810,5 seconden = 13 minuten en 30,5 seconden.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Je hebt te maken met de rr $K_n = 35{,}76 - 0{,}22(n-1)$ waarin K_n de rondetijd van Koen is in ronde n.
Zijn eindtijd is $\sum_{k=1}^{25}(35{,}76 - 0{,}22(k-1))$.

TI Voer in
$u(n) = 35{,}76 - 0{,}22(n-1)$ met nMin = 1
en $v(n) = v(n-1) + 35{,}76 - 0{,}22(n-1)$ met v(nMin) = 35,76.
Lees af in de tabel $\sum_{k=1}^{25}(35{,}76 - 0{,}22(k-1)) = 828$,
dus zijn eindtijd is 828 seconden = 13 minuten en 48 seconden.

Casio Voer in $a_n = 35{,}76 - 0{,}22(n-1)$ met Start: 1.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=1}^{25}(35{,}76 - 0{,}22(k-1)) = 828$,
dus zijn eindtijd is 828 seconden = 13 minuten en 48 seconden.

Bladzijde 31

50 **a** De groei per week wordt gegeven door de formule $g_n = 5{,}2 \cdot 0{,}8^{n-1}$.
De groei in de achtste week is $g_8 = 5{,}2 \cdot 0{,}8^7 \approx 1{,}1$ cm = 11 mm.

b De groei in de eerste acht weken is $\sum_{k=1}^{8} 5{,}2 \cdot 0{,}8^{k-1}$.

TI Voer in
$u(n) = 5{,}2 \cdot 0{,}8^{n-1}$ met nMin = 1
en $v(n) = v(n-1) + 5{,}2 \cdot 0{,}8^{n-1}$ met v(nMin) = 5,2.
Lees af in de tabel $\sum_{k=1}^{8} 5{,}2 \cdot 0{,}8^{k-1} \approx 21{,}6$, dus de plant is in de eerste
acht weken in totaal 21,6 cm = 216 mm gegroeid.

Casio Voer in $a_n = 5{,}2 \cdot 0{,}8^{n-1}$ met Start: 1.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=1}^{8} 5{,}2 \cdot 0{,}8^{k-1} \approx 21{,}6$, dus de plant is
in de eerste acht weken in totaal 21,6 cm = 216 mm gegroeid.

c De tabel geeft $\sum_{k=1}^{10} 5{,}2 \cdot 0{,}8^{k-1} \approx 23{,}2$, dus de hoogte van de plant na tien weken is 18 + 23,2 = 41,2 cm.

51 **a** Je hebt te maken met de rr $Z_n = 5 + 2(n-1)$ waarin Z_n het aantal zitplaatsen in rij n is.
Het aantal zitplaatsen in een sector in de binnenring is $\sum_{k=1}^{34}(5 + 2(k-1))$.

TI Voer in
$u(n) = 5 + 2(n-1)$ met nMin = 1
en $v(n) = v(n-1) + 5 + 2(n-1)$ met v(nMin) = 5.
Lees af in de tabel $\sum_{k=1}^{34}(5 + 2(k-1)) = 1292$, dus er zijn 1292 zitplaatsen in een sector in de binnenring.

Casio Voer in $a_n = 5 + 2(n-1)$ met Start: 1.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=1}^{34}(5 + 2(k-1)) = 1292$, dus er zijn 1292 zitplaatsen in
een sector in de binnenring.

b 12 sectoren in de binnenring geeft $12 \cdot 1292 = 15\,504$ zitplaatsen.
De buitenring heeft $22 \cdot 21 \cdot 13 = 6006$ zitplaatsen.
In totaal zijn er dus 21 510 zitplaatsen.
Dus het aantal van ruim 21 000 klopt wel.

c De inkomsten zijn $8 \cdot 1292 \cdot 45 + 0{,}75 \cdot 6006 \cdot 15 = 532\,687{,}50$ euro.

52 **a** Laag 1 bestond uit $1^2 = 1$ krat.
Laag 2 bestond uit $2^2 = 4$ kratten.
Laag 3 bestond uit $3^2 = 9$ kratten.
enzovoort

Dus het totale aantal gestapelde kratten was $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$ waarbij laag n het nummer van de onderste laag is.

TI Voer in
$u(n) = n^2$ met nMin = 1
en $v(n) = v(n-1) + n^2$ met v(nMin) = 1.

Lees af in de tabel $\sum_{k=1}^{57} k^2 = 63\,365$, dus de stapel bestond uit 57 lagen

Casio Voer in $a_n = n^2$ met Start: 1.

Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=1}^{57} k^2 = 63\,365$, dus de stapel bestond uit 57 lagen

b De stapel in Limmen was $57 \cdot 0{,}25 = 14{,}25$ meter hoog.
De lengte was $57 \cdot 0{,}4 = 22{,}8$ meter en de breedte $57 \cdot 0{,}3 = 17{,}1$ meter.
Dus het grondvlak van het bouwwerk was $22{,}8 \cdot 17{,}1 = 389{,}88$ m^2.

c In de flesjes die in de kratten passen gaat in totaal $63\,365 \cdot 24 \cdot 0{,}33 = 501\,850{,}8$ liter.

d $63\,365 - 9410 = 53\,955$

De tabel geeft $\sum_{k=1}^{54} k^2 = 53\,955$, dus er waren $57 - 54 = 3$ lagen bierkratten meer in Limmen dan in Loo.

8.4 Toenamediagrammen

8

Bladzijde 33

53 **a** De toename is $4{,}1 - 3{,}4 = 0{,}7$ miljoen.
b Vóór 1 januari 2008 is de toename per jaar steeds groter, na 1 januari 2008 wordt de toename per jaar steeds kleiner.

Bladzijde 35

54 $\langle \leftarrow, -2 \rangle$, $\langle -1, 0 \rangle$, $[1, 3]$ en $\langle 5, \rightarrow \rangle$

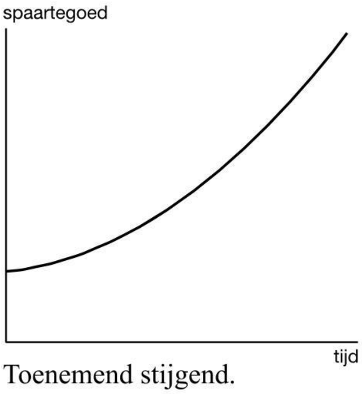
55 **a** De grafiek is dalend op $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en $\langle 3, 6 \rangle$.
b De grafiek is afnemend dalend op $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en $\langle 4, 6 \rangle$.
c De grafiek is afnemend stijgend op $\langle 0, 3 \rangle$.
d Het absolute minimum is 1.
e Voor $x = 3$ is er een maximum. Dat maximum is 4.

56 **a** Constant stijgend op $\langle 0, 3 \rangle$.
Afnemend stijgend op $\langle 3, 4 \rangle$.
Toenemend dalend op $\langle 4, 5 \rangle$.
Afnemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$.
Toenemend stijgend op $\langle 7, 10 \rangle$.
b Na 7 minuten is de steilste klim omdat dan de snelheid het laagst is.

© Noordhoff Uitgevers bv

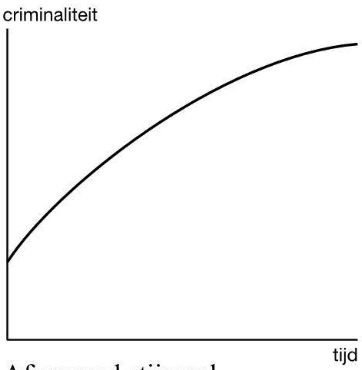
Bladzijde 36

57 **a**



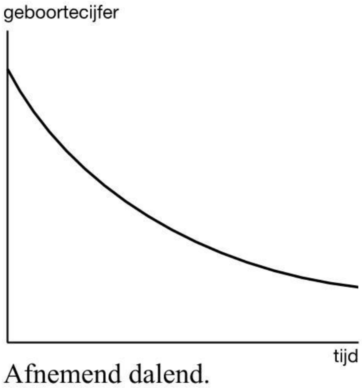
Toenemend stijgend.

b



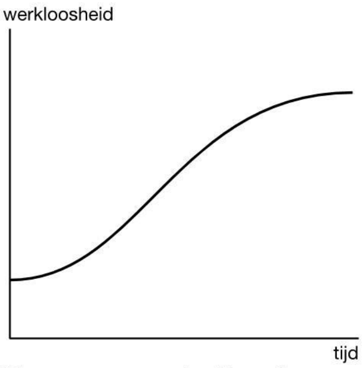
Afnemend stijgend

c



Afnemend dalend.

d



Eerst toenemend stijgend,
dan afnemend stijgend.

58 **a** De grafiek heeft 11 toppen.
b Er zijn 6 maxima.
Om 8 uur is het maximum 6,25 mmol/L.
Om 11 uur is het maximum 5 mmol/L.
Om 14 uur is het maximum 6 mmol/L.
Om 16 uur is het maximum 5,5 mmol/L.
Om 19 uur is het maximum 6,5 mmol/L.
Om 21 uur is het maximum 5,75 mmol/L.
c Het absolute maximum is 6,5 mmol/L.
Het absolute minimum is 4,25 mmol/L.
d Het minimum om 15 uur is 4,75 mmol/L en het maximum om 19 uur is 6,5 mmol/L.
Het maximum is $\frac{6{,}5 - 4{,}75}{4{,}75} \times 100\% \approx 36{,}8\%$ meer dan het minimum.
e Ontbijt om 7 uur, een hapje om 9 uur, lunch om 13 uur, een hapje om 15 uur, diner om 18 uur en een hapje om 20 uur.

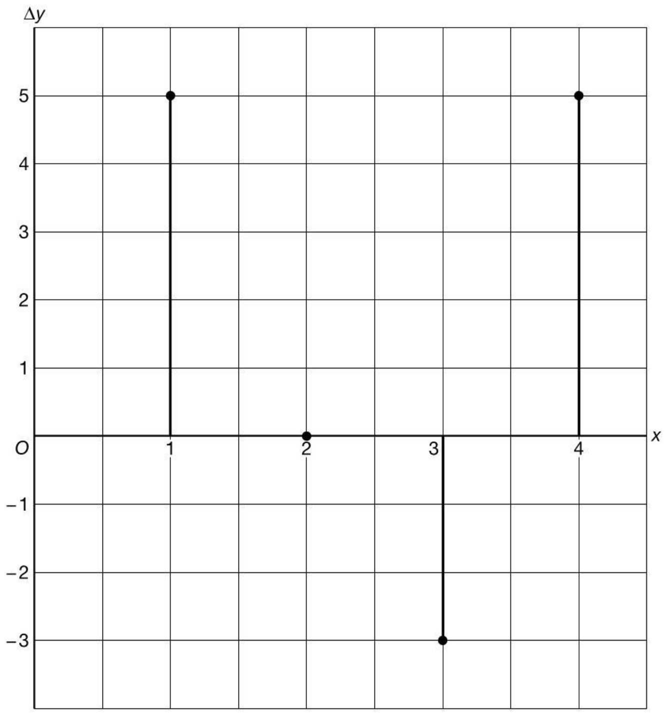
Bladzijde 37

59 **a** 480 000 + 10 000 + 20 000 = 510 000
b 510 000 + 35 000 + 10 000 = 555 000, dus de omzet was € 550 000.
c 550 000 + 5000 − 25 000 − 15 000 − 25 000 = 495 000, dus de omzet was € 495 000.
d In het tweede, derde en vierde kwartaal van 2013.
e In het derde kwartaal van 2012 was de toename het grootst.
De omzet was toen 480 000 + 10 000 + 20 000 + 35 000 = 545 000 euro en dat is minder dan in het vierde kwartaal van 2012. Zie vraag b.

Bladzijde 38

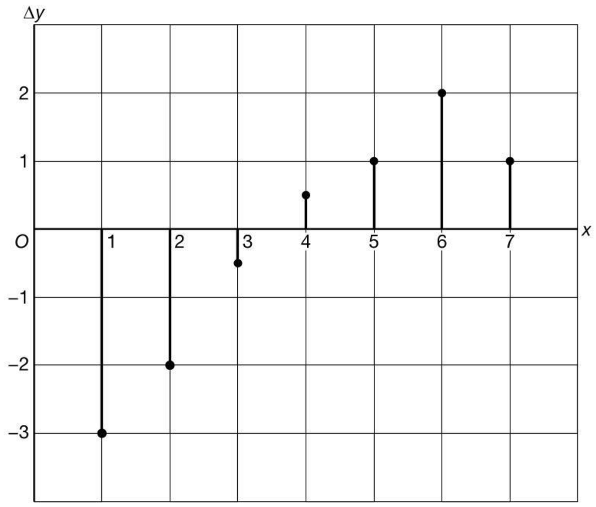
60

interval	Δy
[0, 1]	5
[1, 2]	0
[2, 3]	−3
[3, 4]	5



61 a

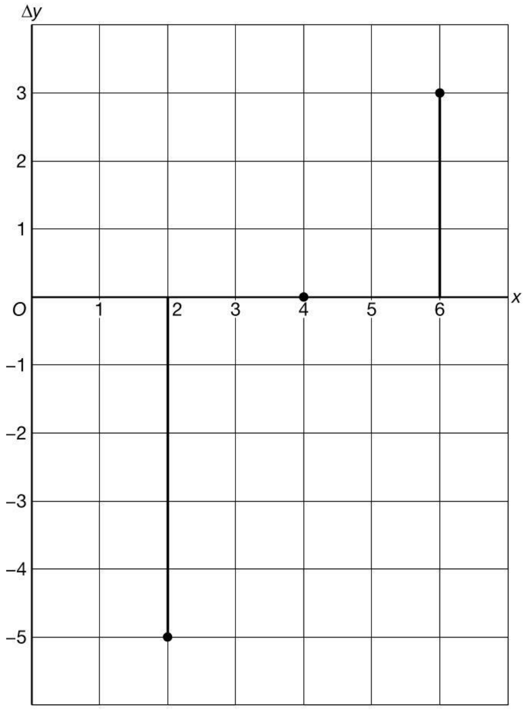
interval	Δy
[0, 1]	−3
[1, 2]	−2
[2, 3]	$-\frac{1}{2}$
[3, 4]	$\frac{1}{2}$
[4, 5]	1
[5, 6]	2
[6, 7]	1



8

b

interval	Δy
[0, 2]	−5
[2, 4]	0
[4, 6]	3

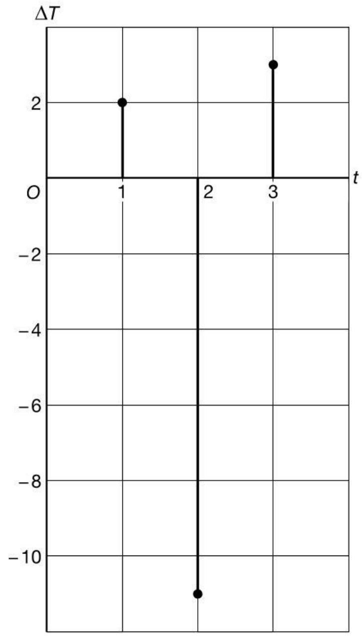


© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 39

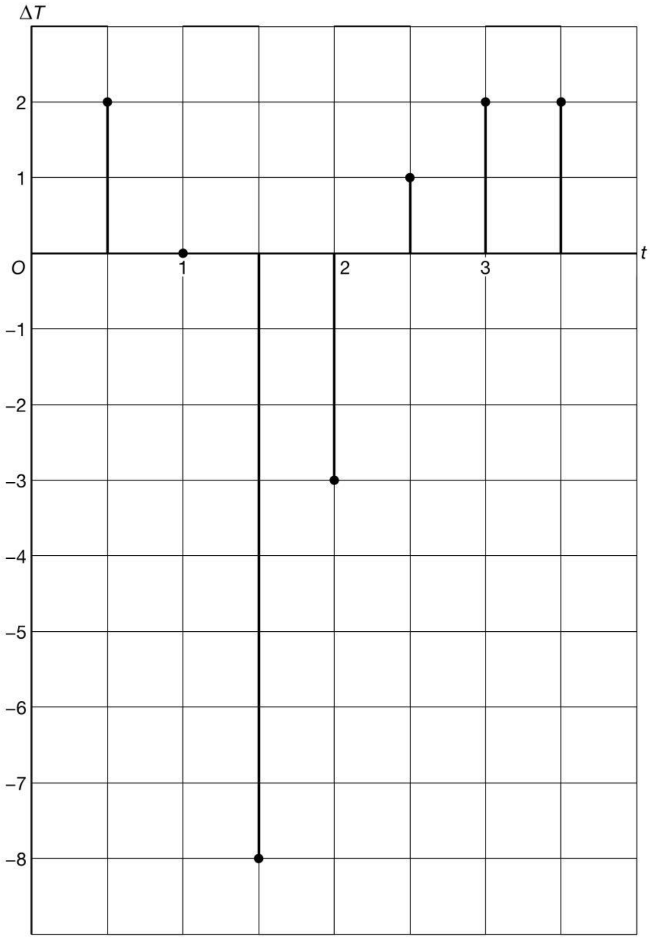
62 **a**

interval	ΔT
[0, 1]	2
[1, 2]	−11
[2, 3]	3



b

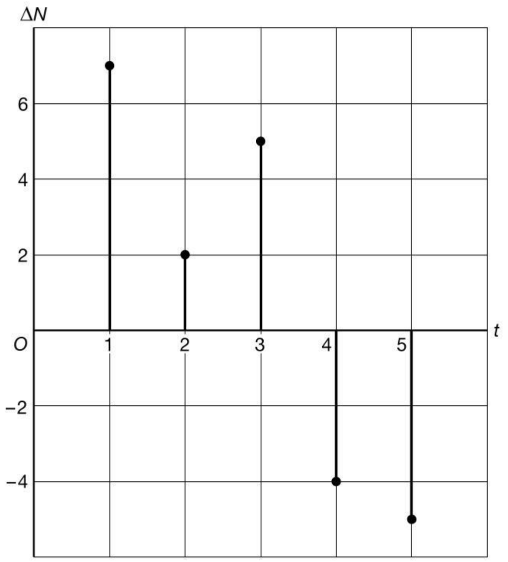
interval	ΔT
[0; 0,5]	2
[0,5; 1]	0
[1; 1,5]	−8
[1,5; 2]	−3
[2; 2,5]	1
[2,5; 3]	2
[3; 3,5]	2



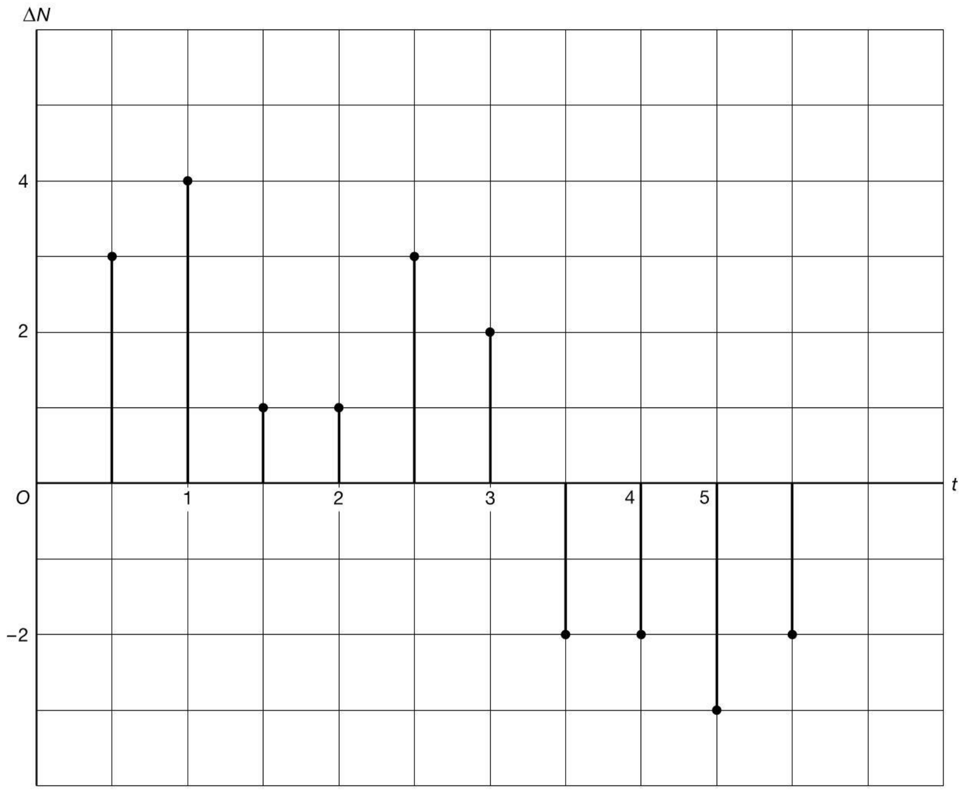
© Noordhoff Uitgevers bv

63 **a**

interval	ΔN
[0, 1]	7
[1, 2]	2
[2, 3]	5
[3, 4]	−4
[4, 5]	−5

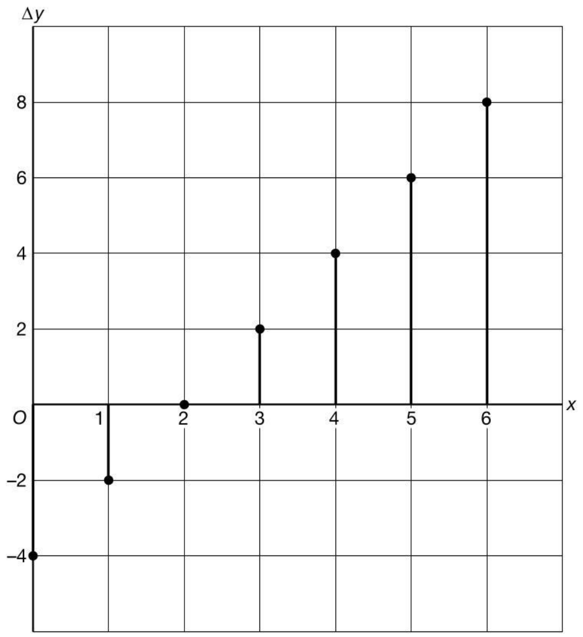


b Verdeel de toename 7 op [0, 1] in twee toenamen van bijvoorbeeld 3 en 4, enzovoort.



64 **a**

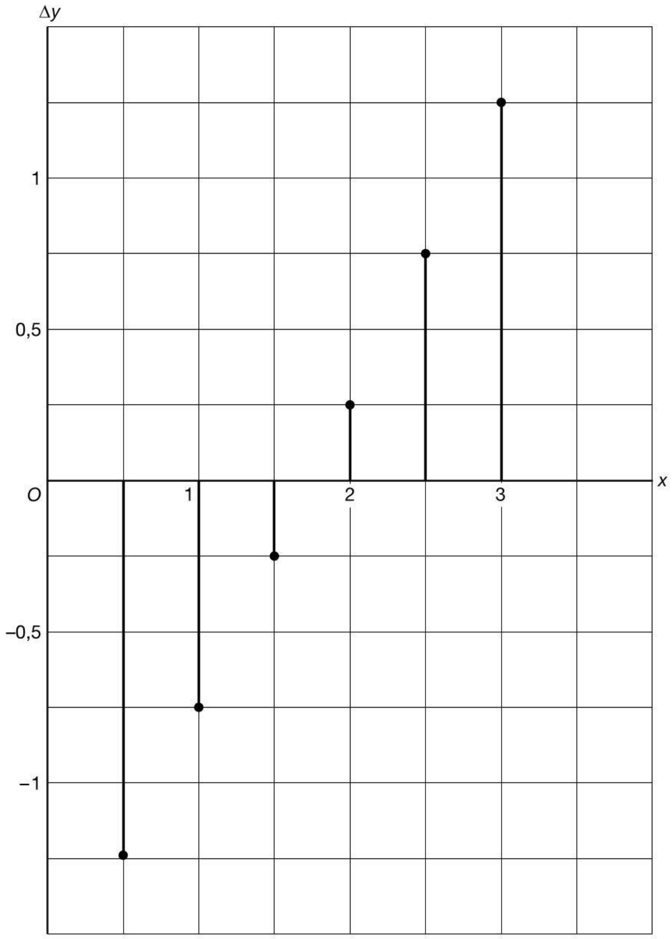
interval	Δy
[−1, 0]	$-3 - 1 = -4$
[0, 1]	$-5 - -3 = -2$
[1, 2]	$-5 - -5 = 0$
[2, 3]	$-3 - -5 = 2$
[3, 4]	$1 - -3 = 4$
[4, 5]	$7 - 1 = 6$
[5, 6]	$15 - 7 = 8$



© Noordhoff Uitgevers bv

b

interval	Δy
[0; 0,5]	−4,25 − −3 = −1,25
[0,5; 1]	−5 − −4,25 = −0,75
[1; 1,5]	−5,25 − −5 = −0,25
[1,5; 2]	−5 − −5,25 = 0,25
[2; 2,5]	−4,25 − −5 = 0,75
[2,5; 3]	−3 − −4,25 = 1,25

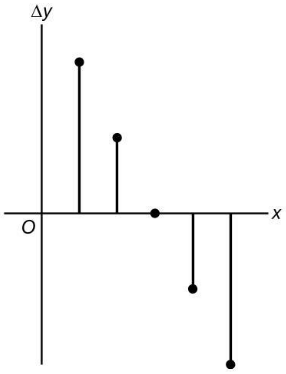


c Eerst afnemende daling en vervolgens toenemende stijging.

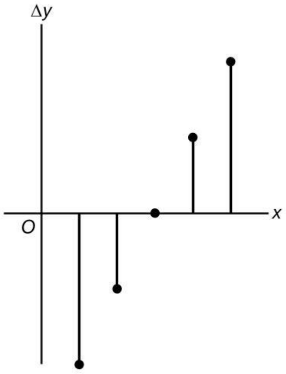
Bladzijde 40

65
I constant dalend
II afnemend stijgend
III afnemend dalend
IV toenemend dalend

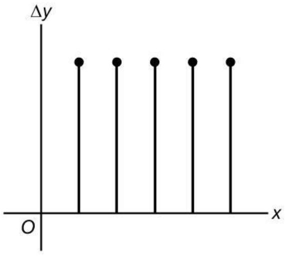
66 **a**



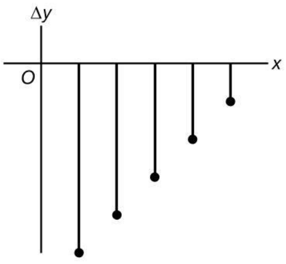
b



c



d

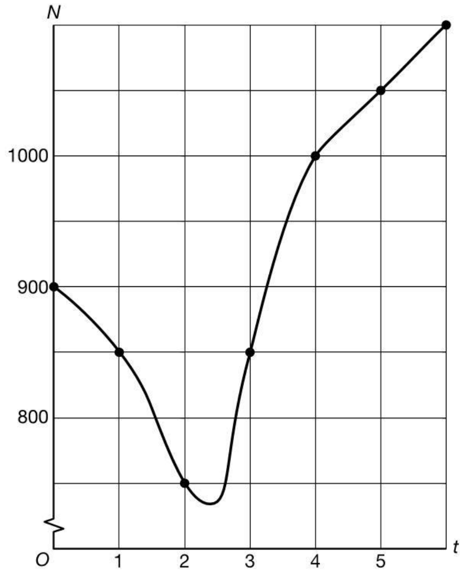


8

67 **a** Omdat $t = 0$ op 1 januari 2009 is het jaar 2011 tussen $t = 2$ en $t = 3$.
Omdat op [2, 3] geldt $\Delta N = -42$ waren er in 2011 dus $88 - 42 = 46$ vorstdagen.
b In 2012 waren er $46 + 4 = 50$ vorstdagen en in 2013 waren er $50 + 14 = 64$ vorstdagen.
c In 2010 waren er 32 vorstdagen meer dan in 2009, dus in 2009 waren er $88 - 32 = 56$ vorstdagen.

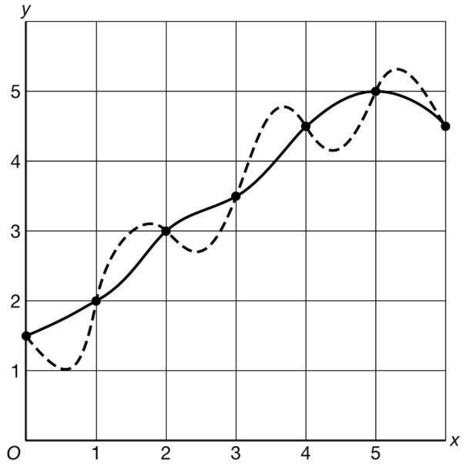
Bladzijde 41

68 Ja, dat kan. Je hebt dan bijvoorbeeld de volgende grafiek.



69 **a**,**b**

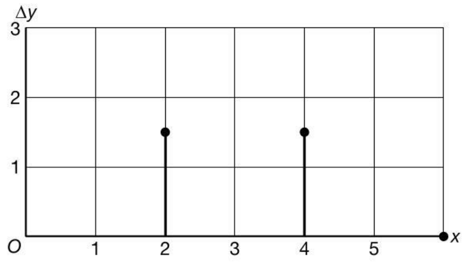
x	y	
0	1,5	+ 0,5
1	2	+ 1
2	3	+ 0,5
3	3,5	+ 1
4	4,5	+ 0,5
5	5	− 0,5
6	4,5	



b Alleen de punten (0; 1,5), (1, 2), (2, 3), ... liggen vast.
Elke grafiek door deze punten is mogelijk.

c

interval	Δy
[0, 2]	1,5
[2, 4]	1,5
[4, 6]	0

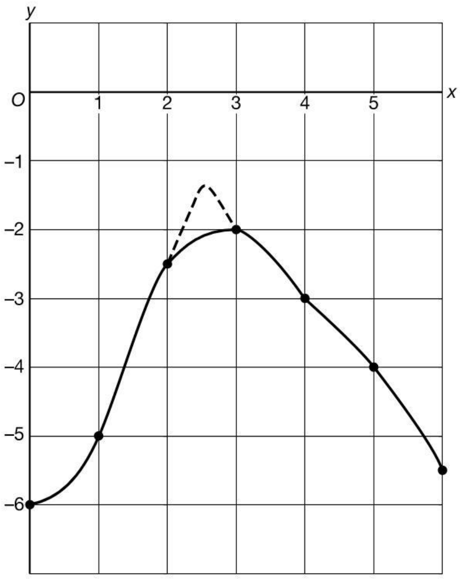


 © Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 42

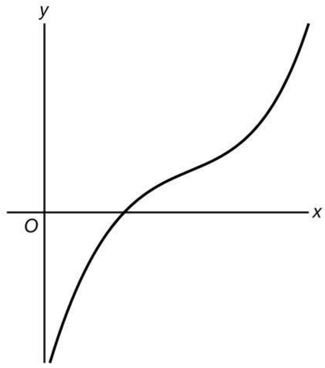
70 **a**

x	y	
0	−6	
1	−5	+ 1
2	−2,5	+ 2,5
3	−2	+ 0,5
4	−3	− 1
5	−4	− 1
6	−5,5	− 1,5

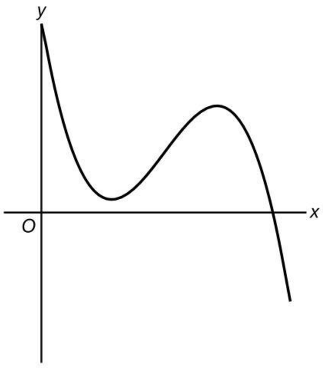


b Dit maximum kan optreden bij $x = 2{,}5$. Zie het gestippelde stuk in de grafiek van vraag a.
Het maximum kan niet optreden bij $x = 1{,}5$, want er is al een maximum tussen $x = 2$ en $x = 4$ en er is gegeven dat er maar één maximum is.

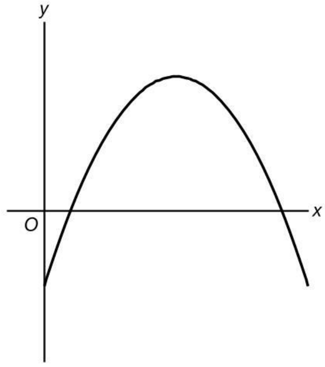
71 **a**



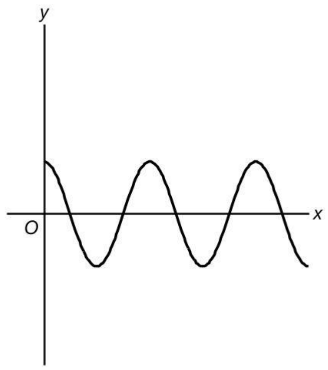
c



b

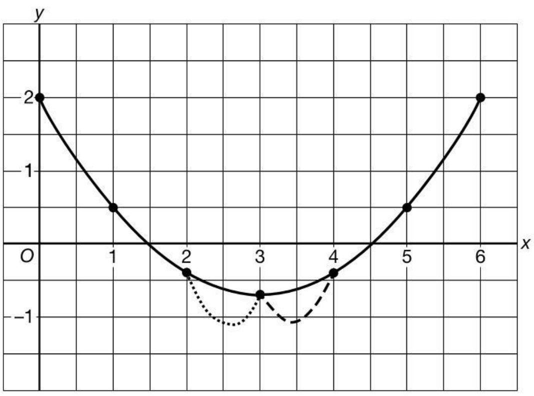


d



72

x	y	
0	2	
1	0,5	− 1,5
2	−0,4	− 0,9
3	−0,7	− 0,3
4	−0,4	+ 0,3
5	0,5	+ 0,9
6	2	+ 1,5



In de getekende grafiek treedt het minimum op bij $x = 3$.
Verder zijn twee mogelijke grafieken getekend: één met het minimum op $\langle 2, 3 \rangle$ en één met het minimum op $\langle 3, 4 \rangle$.
Het minimum kan optreden op $\langle 2, 4 \rangle$.

© Noordhoff Uitgevers bv

73 **a** Om 17:00 uur stonden er 110 − 10 − 35 = 65 fietsen.
Om 9:00 uur stonden er 110 − 25 − 15 + 15 − 40 + 40 + 20 = 105 fietsen.
b Tussen 10 en 11 uur is er netto een afname van 40.
Als 30 personen een fiets hebben neergezet, zijn er dus 70 fietsen meegenomen.

8.5 Differentiequotiënten

Bladzijde 44

74 De toenamen ΔN worden steeds kleiner.
Martijn heeft geen rekening gehouden met de lengten van de perioden.

Bladzijde 45

75 **a** De gemiddelde verandering op [2, 5] is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-5}{5-2} = \frac{1}{3}$.
b Op [3, 6] is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-8}{6-3} = \frac{-3}{3} = -1$.
c Op [-1, 5] is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-2}{5--1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
d Bijvoorbeeld [2, 6].

76 **a** Op [3, 5] is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{7000-2500}{5-3} = \frac{4500}{2} = 2250$.
b De gemiddelde verandering op [2, 6] is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{8500-1000}{6-2} = \frac{7500}{4} = 1875$ personen per uur.
c Op [3, 4] is $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ het grootst.
Dat is tijdens het vierde uur.

Bladzijde 46

77 **a** De gemiddelde toename is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{12\,500-8500}{6000-4000} = \frac{4000}{2000} = 2$ euro per transformator.
b Op [1000, 3000] is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{8000-6500}{3000-1000} = \frac{1500}{2000} = 0{,}75$.
c De helling van de lijn *AB* is $\frac{\Delta K}{\Delta q} = \frac{8000-4000}{3000-0} = \frac{4000}{3000} = 1\frac{1}{3}$.
d De lijn *AB* snijdt de grafiek ook in punt *C*.
Bij *C* hoort $q = 5500$.
Dus voor $q = 5500$ is de gemiddelde toename op [0, 5500] gelijk aan de gemiddelde toename op [0, 3000].
e Op het interval [6000, 7000] is de grafiek steiler dan op het interval [3000, 4000].

78 **a** Op [0, 5] is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{90-0}{5-0} = 18$.
b 18 meter
c Op [3, 7] is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{170-40}{7-3} = \frac{130}{4} = 32{,}5$ m/s.
Dus 32,5 meter.

Bladzijde 47

79 **a** Op [20, 40] is de gemiddelde snelheid $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{12{,}5-5}{40-20} = \frac{7{,}5}{20} = 0{,}375$ km/minuut = 22,5 km/uur.
Op [30, 60] is de gemiddelde snelheid $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{15-10}{60-30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ km/minuut = 10 km/uur.
b De grafiek is niet overal even steil.
c Teken de lijn door (0, 0) en (20, 5) door totdat je de grafiek weer snijdt. Dat is in het punt (60, 15).
Dus $t = 60$.

© Noordhoff Uitgevers bv

80 a De gemiddelde snelheid op [100, 400] is $\frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{4000 - 0}{400 - 100} = \frac{4000}{300} \approx 13{,}33$ euro per stuk.

b De gemiddelde snelheid op [400, 600] is $\frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{3000 - 4000}{600 - 400} = \frac{-1000}{200} = -5$ euro per stuk.

Het minteken betekent dat er sprake is van een afname.

81 a Op [2, 4] is de gemiddelde snelheid $\frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{50 - 20}{4 - 2} = \frac{30}{2} = 15$ euro per stuk.

b De gemiddelde snelheid is $\frac{20 - 50}{6 - 4} = \frac{-30}{2} = -15$ euro per stuk.

c Teken de lijn door het punt (2, 20) met een helling van 10.
Deze lijn snijdt de grafiek ook in het punt (5, 50).
Het getal a is dus 5000.

Bladzijde 48

82 a Op [8, 11] is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(11) - A(8)}{11 - 8} = \frac{8{,}293 - 5{,}536}{3} = 0{,}919$.
Dit betekent dat er tussen 1 september en 1 december per maand gemiddeld 0,919 miljoen km^2 ijs bij komt.

b Van 1 april tot 1 juni, dus op [3, 5].

Op [3, 5] is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(5) - A(3)}{5 - 3} = \frac{10{,}375 - 13{,}581}{2} = -1{,}603$.
De gemiddelde afname is 1,603 miljoen km^2 ijs per maand.

c De laatste vier maanden van het jaar, dus op [8, 12].

Op [8, 12] is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(12) - A(8)}{12 - 8} = \frac{12{,}384 - 5{,}536}{4} = 1{,}712$.

De gemiddelde toename is 1,712 miljoen km^2 per maand, dat is $\frac{1\,712\,000}{30} \approx 57\,000$ km^2 per dag.

d De maand februari, dus op [1, 2].

Op [1, 2] is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{A(2) - A(1)}{2 - 1} = 14{,}224 - 13{,}803 = 0{,}421$.

De gemiddelde toename is 0,421 miljoen km^2 per maand, dat is $\frac{421\,000}{4} \approx 105\,000$ km^2 per week.

e Op [3, 4] is $\Delta A = 12{,}192 - 13{,}581 = -1{,}389$.
Op [4, 5] is $\Delta A = 10{,}375 - 12{,}192 = -1{,}817$.
Op [5, 6] is $\Delta A = 8{,}448 - 10{,}375 = -1{,}927$.
Op [6, 7] is $\Delta A = 6{,}729 - 8{,}448 = -1{,}719$.
Op [7, 8] is $\Delta A = 5{,}536 - 6{,}729 = -1{,}193$.
De grootste afname is op [5, 6].

Deze afname is 1,927 miljoen km^2 per maand, dat is $\frac{1\,927\,000}{30} \approx 64\,000$ km^2 per dag.

Dus Simone heeft gelijk.

8

Diagnostische toets

Bladzijde 50

1 a TI
Voer in $u(n) = u(n - 1) + 0{,}5n^2 + 5$
met nMin = 0 en u(nMin) = 3.
De vijfde term is $u_4 = 38$ en de tiende term is $u_9 = 190{,}5$.

Casio
Voer in $a_{n+1} = a_n + 0{,}5(n + 1)^2 + 5$
met Start: 0 en a_0: 3.
De vijfde term is $u_4 = 38$ en de tiende term is $u_9 = 190{,}5$.

b $u_{13} = 477{,}5$ en $u_{14} = 580{,}5$.
Vanaf de 15^e term is $u_n > 500$.

c Voer in $u(n) = 2u(n - 1) + 3(n - 1)$ met $u(1) = 2$ (TI)
of $a_{n+1} = 2a_n + 3n$ met $a_0 = 2$ (Casio).
$v(8) = 997$ en $v(7) = 488$, dus $v(8) - v(7) = 997 - 488 = 509$.
Dus voor $n = 7$.

© Noordhoff Uitgevers bv

2 **a** $K(t) = 1{,}10K(t-1) - 2850$ met $K(0) = 35\,000$.
b Bij 1 januari 2020 hoort $t = 5$.
Voer in $u(n) = 1{,}10u(n-1) - 2850$ met $u(0) = 35\,000$ (TI)
of $a_{n+1} = 1{,}10a_n - 2850$ met $a_0 = 35\,000$ (Casio).
De tabel geeft $K(5) \approx 38\,968$, dus op 1 januari 2020 zit er 38 968 ton kabeljauw in de Noordzee.
c $K(12) \approx 48\,900$ en $K(13) \approx 50\,940$, dus in het jaar 2028.

3 **a** De achtste term is $T(8) = 3 \cdot 8^2 - 3 \cdot 8 = 168$.
b Voer in $u(n) = n^3 - n^2 + 6$ met nMin = 0 (TI)
of $a_n = n^3 - n^2 + 6$ met Start: 0 (Casio).
De tabel geeft $u_{17} = 4630$, dus de 18e term is 4630.
c $n = 0$ geeft $A_0 = 1$ en $n = 1$ geeft $A_1 = 2 - 3 + 1 = 0$, dus de beginterm is A_1.
De twaalfde term is $A_{12} = 2 \cdot 12^2 - 3 \cdot 12 + 1 = 253$.

4 **a** u_n is een rr met $u_0 = 563$ en $v = -12$, dus $u_n = 563 - 12n$ met beginterm u_0.
$K(t)$ is een mr met $K(0) = 3125$ en $r = 0{,}8$, dus $K(t) = 3125 \cdot 0{,}8^t$ met beginterm $K(0)$.
b De twaalfde term is $K(11) = 3125 \cdot 0{,}8^{11} \approx 268$.
c Los op $563 - 12n = 0$
$-12n = -563$
$n \approx 46{,}9$
$u_{46} = 11$ en $u_{47} = -1$.
De rij u_n heeft 47 positieve termen.

5 **a** $3v = w_7 - w_4 = 324 - 12 = 312$, dus $v = \frac{312}{3} = 104$.
$w_n = w_1 + 104(n-1)$
$w_4 = 12$ geeft $w_1 + 104 \cdot 3 = 12$
$w_1 = -300$
Dus $w_n = -300 + 104(n-1)$ ofwel $w_n = 104n - 404$.
b $r^3 = \frac{w_7}{w_4} = \frac{324}{12} = 27$, dus $r = \sqrt[3]{27} = 3$.
$w_n = w_0 \cdot 3^n$
$w_4 = 12$ geeft $w_0 \cdot 3^4 = 12$
$w_0 = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}$
Dus $w_n = \frac{4}{27} \cdot 3^n$.

Bladzijde 51

6 **a** TI Voer in
$u(n) = n^2 - n + 1$ met nMin = 0
en $v(n) = v(n-1) + n^2 - n + 1$ met v(nMin) = 1.
Lees af in de tabel $\sum_{k=0}^{20} u_k = 341$.
Casio Voer in $a_n = n^2 - n + 1$ met Start: 0.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{k=0}^{20} u_k = 341$.
b TI Voer in
$u(n) = 2u(n-1) - 3$ met nMin = 1 en u(nMin) = 6
en $v(n) = v(n-1) + 2u(n-1) - 3$ met v(nMin) = 6.
Lees af in de tabel $\sum_{i=1}^{11} a_i = 6174$.
Casio Voer in $a_{n+1} = 2a_n$ met Start: 1 en $a_1 = 6$.
Aflezen bij $\sum a_{n+1}$ in de tabel geeft $\sum_{i=1}^{11} a_i = 6174$.

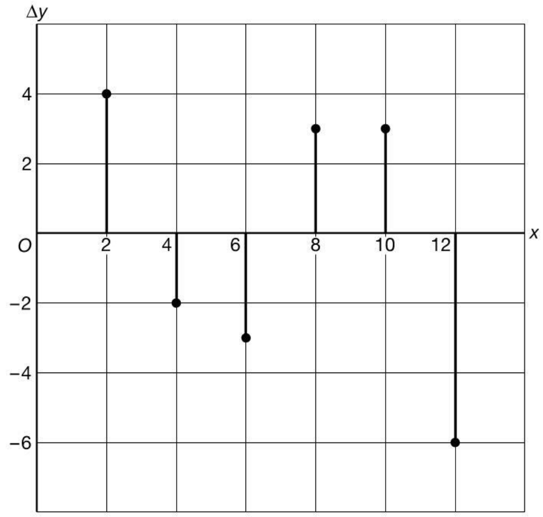
© Noordhoff Uitgevers bv

c TI Voer in
$u(n) = 2n^2 + 1$ met nMin = 0
en $v(n) = v(n - 1) + 2n^2 + 1$ met v(nMin) = 1.
Lees af in de tabel $\sum_{j=0}^{10}(2j^2 + 1) = 781$ en $\sum_{j=0}^{11}(2j^2 + 1) = 1024$,
dus vanaf $n = 11$ is $\sum_{j=0}^{n}(2j^2 + 1) > 1000$.

Casio Voer in $a_n = 2n^2 + 1$ met Start: 0.
Aflezen bij $\sum a_n$ in de tabel geeft $\sum_{j=0}^{10}(2j^2 + 1) = 781$ en $\sum_{j=0}^{11}(2j^2 + 1) = 1024$,
dus vanaf $n = 11$ is $\sum_{j=0}^{n}(2j^2 + 1) > 1000$.

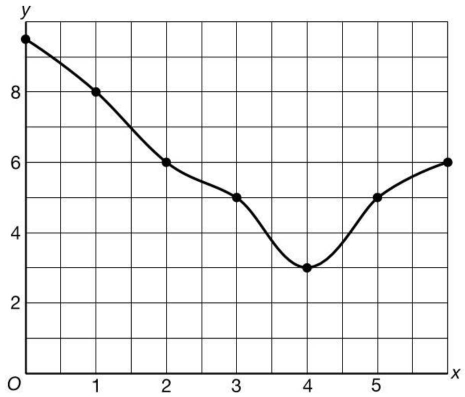
7 **a** Toenemend stijgend op $\langle 6, 8\rangle$.
Afnemend dalend op $\langle 3, 4\rangle$, $\langle 5\frac{1}{2}, 6\rangle$ en $\langle 11, 12\rangle$.
b In de punten B en F treedt een maximum op.
Het maximum in B is 6.
Het maximum in F is 7.
c

interval	Δy
[0, 2]	4
[2, 4]	−2
[4, 6]	−3
[6, 8]	3
[8, 10]	3
[10, 12]	−6



8 Door (3, 5) en op [3, 4] is $\Delta y = -2$, dus ook door (4, 3).
Door (3, 5) en op [2, 3] is $\Delta y = -1$, dus ook door (2, 6).
Enzovoort, zie de tabel.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	9,5	8	6	5	3	5	6



9 **a** De gemiddelde verandering op [0, 4] is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-2}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

De gemiddelde verandering op [2, 12] is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-6}{12-2} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$.

b Op [4, 6] is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-4}{6-4} = \frac{-3}{2} = -1\frac{1}{2}$.

Op [6, 10] is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-1}{10-6} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$.

10 **a** Op [5, 25] is $\frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{W(25) - W(5)}{25 - 5} = \frac{1931{,}25 - -313{,}75}{20} = \frac{1345}{20} = 67{,}25$ euro per stuk.

b Op [50, 75] is $\frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{W(75) - W(50)}{75 - 50} = \frac{5968{,}75 - 3500}{25} = 98{,}75$.
De gemiddelde toename is € 98,75 per stuk.

c Op [80, 88] is $\frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{W(88) - W(80)}{88 - 80} = \frac{6941{,}28 - 6380}{8} = 70{,}16$.
De gemiddelde verandering is € 70,16 per stuk.

8

© Noordhoff Uitgevers bv